

最优传热结构设计问题的数学模型^{*}

张永存 刘书田^{**}

大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室/工程力学系, 大连 116023

摘要 通过一个平板散热器的设计, 分析了基于热传递势容耗散(或散热弱度)的传热结构设计优化模型的近似程度, 提出了一个基于几何平均温度的散热性能描述指标, 并以此为目标函数, 建立了一个新的传热结构设计优化模型. 通过传统的基于热传递势容耗散最小为目标的设计模型获得的设计以及真实最优设计(最大温度最小对应的设计)的比较, 说明了几何平均温度是描述散热性能的良好指标, 所建立的优化模型能够有效获得散热结构的最优设计.

关键词 散热结构设计 优化 热量传递势容耗散

随着科技的发展, 集成电路向微型化高集成度方向发展, 高效散热成为关键问题. 随着结构尺寸进一步缩小, 内部结构布置越来越紧密, 设置散热管道进行对流换热变得困难^[1,2]. 在这种情况下, 填充高导热材料构成高导热通道以减少热阻, 从而达到增强散热的目的. 合理的材料布置可以减少所使用的材料, 降低成本, 且有利于器件的进一步小型化. 这样的问题同样存在于其他场合, 如航空航天飞行器的热防护系统, 大空间内化学反应以及生物发酵过程中的加热或冷却, 食品加工后的冷却等. 因此, 研究散热结构最优热传递构型的设计理论和方法, 研究最佳散热结构优化问题的提法成为重要的研究课题.

目前, 有关散热结构设计问题的数学模型和求解方法的研究, 已有大量的研究工作^[1-24]. 例如, Bejan 等开展的基于构形理论的散热结构设计^[1-8], 过增元等开展的基于热量传递势容耗散原理的最优散热结构设计准则以及散热结构的设计方法^[9-15], 以及基于拓扑优化思想的散热结构设计方法^[16-22]. 散热结构优化设计是在一定的约束条件下, 选取合适的散热性能描述指标为目标函数, 建立含约束、

选定目标函数的极大或极小的数学模型, 以该数学模型表示的优化问题的解作为最优散热结构设计. 因此, 散热性能描述指标(优化目标)的选取成为实现最优设计的关键.

在实际散热结构中, 最高温度是引起设备失效的主要原因之一. 据有关统计数据^[25,26]显示, 电子设备的失效率有 55% 是由温度过高引起的. 随着温度的升高, 电子设备的失效率呈指数增长趋势. 因此最优的散热结构应该是体内的最高温度最低的结构. 然而, 在优化过程中, 随着材料分布(结构形式)的变化, 最高温度所在的位置有可能是变化的. 因此, 直接以最高温度为目标函数, 则存在目标函数随设计变量的变化出现不连续等问题, 造成优化计算的困难. 因此, 需要选择函数形态良好、能够准确反应设计目的的性能描述指标作为目标函数.

已有的散热结构优化设计大都选用以下形式的目标函数

$$f(\mathbf{X}) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} (-q(\mathbf{X}) \Delta T(\mathbf{X})) d\Omega \quad (1)$$

2007-10-12 收稿; 2007-12-14 收修稿

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 10332010, 10721062)、国家重点基础研究发展计划(批准号: 2006CB601205)和教育部新世纪优秀人才支持计划资助

^{**} E-mail: stliu@dlut.edu.cn

©1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. <http://www.cnki.net>

式中, X 为设计变量, 描述材料分布或结构型式; $q(X)$ 为热流密度, $\Delta T(X)$ 为温度梯度. 如果采用有限元法求解传热问题, 则上式可表示成如下的离散形式

$$f(X) = T^T K(X) T \quad (2)$$

式中 T 表示单元的节点温度矢量, $K(X)$ 为热传导系数矩阵. 很多学者从不同的角度给出了以上目标函数的物理解释. 例如, 文献[1]从传热学的角度, 定义(1)式为热量传递势容耗散, 并提出了热量传递势容耗散原理; 文献[17, 18]将(2)式定义为散热弱度, 并作为目标函数开展了散热结构的拓扑优化设计.

(1)和(2)式表示的散热性能描述指标(称为热传递势容耗散, 或散热弱度)是描述散热性能的较好的目标函数, 也获得了一批散热性能良好的设计结果. 但这种形式的目标函数, 只是散热性能的一种描述, 也可以说是设计目标(最大温度最小)的特征和近似. 因此, 需要考虑两个问题: (i) 基于该目标函数构建的优化问题能否实现散热性能的最优设计(最大温度最小)或在多大程度上描述最优设计? (ii) 能否找到更合适的性能描述指标, 以更准确地实现最优设计? 这是本文研究的主要动因.

研究该类目标函数的近似程度, 对优化模型的改进具有重要意义. 本文通过一个平板散热器的一维传热问题, 分析基于热传递势容耗散(或散热弱度)的传热结构设计优化模型的近似程度, 提出了一个基于几何平均温度的散热性能描述指标, 并以此为目标函数, 建立了一个新的散热结构设计优化模型.

1 导热平板散热器优化设计

由于工程结构散热往往要求是最大温度最小. 以下以最大温度最小为散热性能的绝对指标, 并通过与现有优化模型的设计结果的比较, 分析现有优化模型的近似程度和质量. 为了分析优化模型的本质及计算的方便, 本文以可获得解析解的平板结构一维散热问题为例, 分析传统的以热量传递势容耗散(或散热弱度)最小为优化目标的散热结构设计模型的近似程度.

1.1 问题描述

考虑一嵌入发热器件中的厚度为 t , 长度为 l 的矩形板式散热器. 发热器件发出的热量通过散热器表面均匀地输入散热器, 单位时间内通过单位面积输入的热量为 q'' . 散热器通过沿宽度方向(下边)的边界散热. 散热边界通过热管等散热方式使其维持恒定的温度 T_0 , 其余三边绝热. 设计目的是在给定的材料体积的条件下, 设计散热器的厚度沿长度方向的变化, 以使散热器具有最优的散热性能.

根据问题的性质, 散热器的传热模型可简化成具有内热源的平面传热问题, 如图1所示. 考虑到板的厚度、热源等沿宽度方向保持不变, 该传热模型可进一步简化为沿长度方向的一维传热问题. 对于平面传热问题, 面内导热系数与厚度成正比. 因此, 厚度分布的设计, 可转化为面内热传导系数的设计. 材料用量的限制: $\int_0^l t(x) dx = \text{const}$ 可转化为对传热能力的要求, 即各点面内热传导系数的积分为常数: $\int_0^l k(x) dx = K_0$. 散热器内部的传热过程由以下控制方程描述

$$\begin{aligned} q(x) &= -k(x) \frac{dT}{dx}, \quad \frac{dq}{dx} + q'' = 0, \quad 0 < x < l \\ T(x=0) &= T_0, \quad q(x=l) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

式中, $k(x)$ 为面内导热系数, $q(x)$, $T(x)$ 分别表示热流密度和温度. 由上式可得

$$\begin{aligned} q &= -q''(l-x), \\ T(x) &= T_0 + \int_0^x \Delta T dx = \\ &T_0 + q'' \int_0^x (l-x)/k(x) dx \end{aligned} \quad (4)$$

散热器的优化设计问题可表示为, 在一定的传热能力(材料用量)的条件下, 设计热传导系数(厚度)的分布以使散热性能最优. 将散热性能指标函数表示为 $f(k)$, 则散热优化问题可表示为

$$\begin{aligned} \text{Find} &: k(x) \\ \text{min} &: f(k) \\ \text{s.t.} &: \int_0^l k(x) dx = K_0 \end{aligned} \quad (5)$$

利用 Lagrange 乘法, 最优热传导系数可由以下条件确定:

$$\begin{aligned} \delta(f(k)) + \lambda \int_0^l \delta dx &= 0, \\ \delta \left(\int_0^l k dx - K_0 \right) &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

1.2 以最大温度最小为目标的材料分布设计

最优结构设计追求的目标是最大温度最小, 此时散热性能指标函数 $f(k)$ 取为最大温度 $T_{\max}(k)$. 根据散热器的结构和传热特点可知, 最高温度发生在远离散热边界相对的边 ($x=l$) 上. 由(4)式, 最大温度为

$$T_{\max}(k) = T_0 + q'' \int_0^l (l-x)/k(x) dx \quad (7)$$

代入(6)式, 有

$$\begin{aligned} \int_0^l [-q''(l-x)/k^2(x) + \lambda] \delta(x) dx &= 0, \\ \int_0^l k dx &= K_0 \end{aligned} \quad (8)$$

求解上式可获得最优的热传导系数分布 $k_{T_{\max}}(x)$ 为

$$k_{T_{\max}}(x) = \frac{3K_0}{2l^{3/2}} (l-x)^{1/2} \quad (9)$$

相应的散热器内温度分布为

$$T_{T_{\max}}(x) = T_0 + \frac{4q''l^{3/2}}{9K_0} (l^{3/2} - (l-x)^{3/2}) \quad (10)$$

引入无量纲参数

$$\tilde{x} = x/l \quad (11)$$

并将导热系数分布和温度分布无量纲化, 得

$$k_{T_{\max}}(\tilde{x}) = \frac{k(x)}{K_0/l} = 3(1-\tilde{x})^{1/2}/2 \quad (12)$$

$$\begin{aligned} T_{T_{\max}}(\tilde{x}) &= \frac{T(x) - T_0}{q''l^3/K_0} = \\ &= 4(1 - (1-\tilde{x})^{3/2})/9 \end{aligned} \quad (13)$$

下标 T_{\max} 表示以最大温度最小为优化目标.

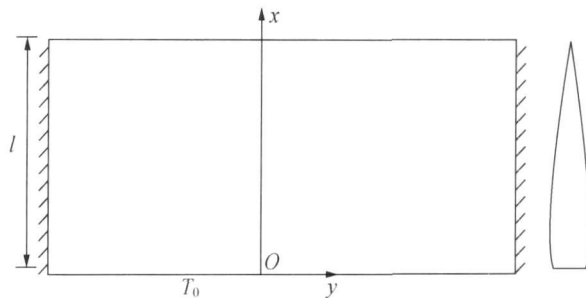


图 1 导热平板散热器理论模型

1.3 以热传递势容耗散最小为目标的材料分布设计

对于本文考虑的平板散热器, 热量传递势容耗散为

$$f(k) = \frac{(q'')^2}{2} \int_0^l \frac{(l-x)^2}{k} dx \quad (14)$$

若以热量传递势容耗散最小为优化目标, 则最优的导热系数分布应满足的条件为

$$\begin{aligned} \int_0^l \left[-\frac{(q'')^2(l-x)^2}{2k^2(x)} + \lambda \right] \delta(x) dx &= 0, \\ \int_0^l k dx &= K_0 \end{aligned} \quad (15)$$

由上式可得热量传递势容最小的热传导系数分布函数为

$$k_{\text{dis}}(x) = \frac{2K_0}{l^2} (l-x) \quad (16)$$

相应的温度分布为

$$T_{\text{dis}}(x) = T_0 + \frac{q''l^2}{2K_0} x \quad (17)$$

将导热系数分布和温度分布无量纲化

$$k_{\text{dis}}(\tilde{x}) = \frac{k(x)}{K_0/l} = 2(1-\tilde{x}) \quad (18)$$

$$T_{\text{dis}}(\tilde{x}) = \frac{T(x) - T_0}{q''l^3/K_0} = \tilde{x}/2 \quad (19)$$

其中, 下标 dis 表示是以热量传递耗散为优化目标.

1.4 不同优化模型的比较分析

图 2 给出了分别以热量传递势容耗散和最大温度最小表示的散热性能指标为目标函数的优化模型的最优材料分布和相应的温度分布图. 为了便于比较, 当材料(热传导系数)均匀分布时的温度分布也显示在图 2 中(用 ‘av’ 表示). 此时, 温度分布为

$$T_{av} = T_0 + \int_0^x \Delta T dx = T_0 + \frac{q''l(x-x^2/2)}{K_0} \quad (20)$$

无量纲化为

$$T_{av} = \tilde{x} - \tilde{x}^2/2 \quad (21)$$

相对于材料均匀分布时的温度场, 以(1)式(热传递势容耗散或散热弱度)为目标的优化设计结果的温度在散热器内部均有大幅度的下降, 但最大温度并没有降低. 获得的材料最优分布为等效的面内热传导系数沿长度方向呈线性变化, 这与最高温度最小对应的材料分布((12)式)有较大差别. 相应的最高温度比真实的最优分布对应最高温度高 12.5%. 这种差别表明, 通常基于(1)式为目标函数建立的优化模型给出的最优散热结构设计, 在某些情况下与最优设计差别较大. 需要研究更准确的散热性能指标, 建立更合适的优化模型.

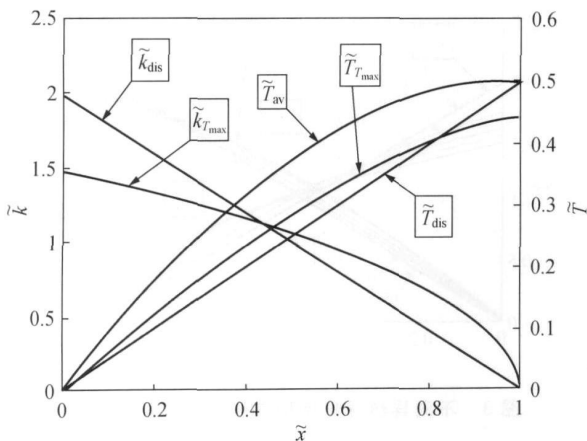


图 2 比较不同优化目标下的温度场分布及导热系数场分布 其中下标 av, dis, T_{max} 分别表示均匀导热系数场, 以最小热量传递势容耗散为优化目标和以板内最高温度为优化目标

2 基于几何平均温度为散热性能描述指标的优化模型

2.1 目标函数与优化模型

以上分析说明通过热量传递势容耗散(或散热弱度)最小模拟最高温度最小, 在某些情况下存在较大误差. 另一方面, 直接以最高温度为散热性能描述指标, 并作为目标函数建立的优化模型又存在(对于复杂的设计问题)函数不连续等问题. 为此, 我们引进几何平均温度 T_{GeoAv} , 其定义为

$$T_{GeoAv} = \left[\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} (T(x))^n dx \right]^{1/n}, x \in \Omega \quad (22)$$

式中 $|\Omega|$ 表示材料所占区域 Ω 的测度(体积或面积). 理论上, 但 n 取无限大时, 几何平均温度趋近于最高温度: $T_{GeoAv} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T_{Max}$. 因此, 选取适当大的 n , 则几何平均温度可作为最高温度的良好近似. 此时, 最优散热结构设计优化问题的新的数学模型可表示为

$$\begin{aligned} \text{Find : } & X = k(x), \quad x \in \Omega \\ \text{min : } & T_{GeoAv}(X) = \left[\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} (T(x))^n dx \right]^{1/n} \\ \text{s.t. : } & \int_{\Omega} k d\Omega = K_0, \quad K_0 = \text{const} \end{aligned} \quad (23)$$

除少数简单问题有解析解, 大部分问题的求解则需要采用数值方法(例如有限元方法)完成. 将设计域离散成有限元网格, 并假设在每个单元内材料分布是均匀的, 具有相同的热传导系数. 此时, 材料分布问题, 可通过赋予各单元材料不同的热传导系数描述. 材料分布(热传导系数分布)可通过离散的形式表示为

$$k(x) = k_e, \quad x \in \Omega_e, \quad e = 1, 2, \dots, Ne \quad (24)$$

式中 $k_e (e = 1, 2, \dots, Ne)$ 表示第 e 个单元的材料热传导系数, $\Omega_e \in \Omega$ 为第 e 个单元区域, Ne 为单元总数.

根据有限元法的思想, 材料内部任意点的温度及其 n 次幂可表示为

$$T(x) = [N(x)] \{T\},$$

$$T^n(x) = [N(x)] \{T^n\} \quad (25)$$

$$\{T\} = (T_1, T_2, \dots, T_{N_p})^T,$$

$$\{T^n\} = [(T_1)^n, (T_2)^n, \dots, (T_{N_p})^n]^T \quad (26)$$

式中 $\{T\}$, $\{T^n\}$ 分别表示节点的温度矢量和相应的 n 次幂矢量, $T_n (n=1, 2, \dots, N_p)$ 为第 n 个节点的温度, N_p 表示单元节点总数. $[N(x)]$ 为形函数矩阵, 可在各单元内定义. 节点温度可由有限元控制方程获得

$$[K] \{T\} = \{Q\} \quad (27)$$

式中 $\{Q\}$ 为 2 节点热流矢量, $[K]$ 为热传导矩阵, 可由单元热传导矩阵组装而成

$$[K] = \sum_{e=1}^{N_e} [K_e], \quad [K_e] = k_e [K_e^0] \quad (28)$$

$[K_e^0]$ 表示第 e 个单元的材料热传导系数为 1 时对应的单元热传导矩阵.

几何平均温度可进一步表示为

$$T_{GeoAv} = \left([B] \{T^n\} \right)^{1/n},$$

$$[B] = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} [N(x)] dx \quad (29)$$

因此, 基于有限元法的离散形式的散热结构最优设计问题可表示为

$$\text{Find: } X = (k_1, k_2, \dots, k_{N_e})^T$$

$$\text{min: } T_{GeoAv}(X) = \left([B] \{T^n\} \right)^{1/n} \quad (30)$$

$$\text{s.t.: } \sum_{e=1}^{N_e} k_e V_e = K_0, \quad V_e = |\Omega_e|$$

以上优化问题可采用可行方向法求解. 其中目标函数的敏度可表示为

$$\frac{\partial T_{GeoAv}}{\partial k_e} = \frac{1}{n} \left([B] \{T^n\} \right)^{-(n-1)/n} [B] \frac{\partial \{T^n\}}{\partial k_e} \quad (31)$$

式中

$$\frac{\partial \{T^n\}}{\partial k_e} = \text{diag} (nT_1^{n-1},$$

$$nT_2^{n-1}, \dots, nT_{N_p}^{n-1}) \left\{ \frac{\partial T}{\partial k_e} \right\} \quad (32)$$

$$\left\{ \frac{\partial T}{\partial k_e} \right\} = -[K]^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial k_e} [K] \right] \{T\} =$$

$$-[K]^{-1} [K_e^0] \{T\} \quad (33)$$

2.2 设计结果与分析

针对第 1 节讨论的平板散热器设计问题, 由于可退化为一维传热问题, 因此, 采用 2 节点一维热传导单元离散. 根据 (23) 式表示的以几何平均温度为目标的优化模型, 采用可行方向法求解, 获得了材料的最优分布 (热传导系数分布) 以及相应的温度分布, 如图 3 所示. 当几何平均温度中的幂指数 n 取 8 时, 获得的材料分布和温度分布与最优解 (最大温度最小对应的材料分布和温度分布) 非常接近, 这说明几何平均温度是一个良好的散热性能描述指标, 以此为目标建立的散热设计优化问题的提法, 比基于热传递势容耗散 (或散热弱度) 最小建立的优化模型更能准确地描述原设计问题. 通常采用的优化模型的设计结果与幂指数 $n=1$ 的几何平均温度最小获得的设计结果相同. 随着幂指数的增大, 基于几何平均温度的优化模型得到的设计结果快速趋向于真实的最优设计. 由于计算通常是采用计算机经过数值运算进行的, 当幂指数过大时, 会造成数据过大, 从而引起计算困难. 由于改进程度随幂指数的增大趋于稳定, 在实际设计中, 幂指数可取适当大小的数值, 而不需要追求无限大.

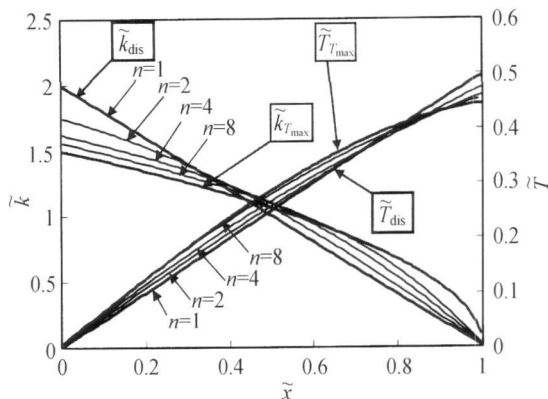


图 3 不同导热优化模型与最有理论解的比较

3 结论

最佳散热结构的追求目标是在一定的材料用量

(散热能力)的条件下,通过设计材料的合理分布以使最大温度最小.通常的基于热传递势容耗散(或散热弱度)最小为目标的散热结构设计优化模型获得的设计与真实最优设计可能存在较大差别.本文提出的几何平均温度是一个良好的散热性能描述指标,从数值算例中可以看出,以此为目标函数建立的散热问题的数学模型是一种有效的散热结构设计模型,能够获得与真实最优设计更接近的设计.

参 考 文 献

- 1 Bejan A. Constructal theory network of conducting paths for cooling paths for cooling a heat generating volume. *International Journal of Heat Mass Transfer*, 1997, 40(4): 799—816
- 2 Bejan A. *Shape and Structure, from Engineering to Nature*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000
- 3 Ledezma GA, Bejan A, Errera MR. Constructal tree network for heat transfer. *Journal of Applied Physics*, 1997, 82(1): 89—100
- 4 Almgöbel M, Bejan A. Conduction trees with spacing at tips. *International Journal of Heat Mass Transfer*, 1999, 42(20): 3739—3756
- 5 Almgöbel M, Bejan A. Constructal optimization of nonuniformly distributed tree-shaped flow structures for conduction. *International Journal of Heat Mass Transfer*, 2001, 44(22): 4185—4194
- 6 Rocha LAO, Lorente S, Bejan A. Constructal design for cooling a disc-shaped area by conduction. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2002, 45: 1643—1652
- 7 Silva AKD, Vasile C, Bejan A. Disc cooling with high-conductivity inserts that extend inward from the perimeter. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2004, 47(19—20): 4257—4263
- 8 Rocha LAO, Lorente S, Bejan A. Conduction tree networks with loops for cooling a heat generating volume. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2006, 49(15—16): 2626—2635
- 9 程新广, 夏再忠, 李志信, 等. 导热优化: 热耗散与最优导热系数场. *工程热物理学报*, 2002, 23(6): 715—717
- 10 夏再忠, 过增元. 用生命演化过程模拟导热优化. *自然科学进展*, 2001, 11(8): 845—852
- 11 过增元, 程新广, 夏再忠. 最小热量传递势容耗散原理及其在导热优化中的作用. *科学通报*, 2003, 48(1): 21—25
- 12 程新广, 李志信, 过增元. 热传导中的变分原理. *工程热物理学报*, 2004, 25(3): 457—459
- 13 过增元, 梁新刚, 朱红晔. 焓——描述物理传递热量能力的物理量. *自然科学进展*, 2006, 16(10): 1288—1296
- 14 程新广, 孟继安, 过增元. 导热优化中的最小传递势容耗散与最小熵产. *工程热物理学报*, 2005, 6(6): 1034—1036
- 15 韩光泽, 郭增元. 不同目的热优化目标函数: 热量传递势容耗散与熵产. *工程热物理学报*, 2006, 27(5): 811—813
- 16 Li Q, Steven GP, Xie YM, et al. Evolutionary topology optimization for temperature reduction of heat conducting fields. *International Journal of Heat Mass Transfer*, 2004, 47(23): 5071—5083
- 17 贾海朋. 结构与柔性机构拓扑优化. 大连理工大学博士论文, 大连, 2004
- 18 左孔天, 陈立平, 张云清, 等. 用拓扑优化方法进行热传导散热体的结构优化设计. *机械工程学报*, 2005, 41(4): 13—21
- 19 Zhang YC, Liu ST. Design of high-conduction paths based on topology optimization. The Fourth China-Japan-Korea Joint Symposium on Optimization of Structural and Mechanical Systems. Kunming, China, Nov. 6—9, 2006: 449—454
- 20 李家春, 叶邦彦, 汤 勇, 等. 基于密度法的热传导结构拓扑优化准则算法. *华南理工大学学报(自然科学版)*, 2006, 34(2): 27—32
- 21 Xu XH, Liang XA, Xun RJ. Optimization of heat conduction using combinatorial optimization algorithms. *International Journal of Heat Mass Transfer*, 2007, 50(9—10): 1675—1682
- 22 Francois Mathieu-Potvin, Louis Gosselin. Optimal conduction pathways for a heat generating body: A comparison exercise. *International Journal of Heat Mass Transfer*, 2007, 50(5—16): 2996—3006
- 23 伍文君, 陈林根, 孙丰瑞. 导热优化的“树网”构造法的改进. *中国科学, E辑(技术科学)*, 2006, 36(7): 773—781
- 24 Zhou SB, Chen LE, Sun FR. Optimization of constructal volume-point conduction with variable cross section conducting path. *Energy Conversion and Management*, 2007, 48(1): 106—111
- 25 刘明安, 董秋霞, 陈 硕. 开式机箱电子设备热设计的数值研究. *空军工程大学学报(自然科学版)*, 2005, 6(2): 62—65
- 26 齐永强, 何雅玲, 张 伟, 等. 电子设备热设计的初步研究. *现代电子技术*, 2003, 144: 73—76